Die Funktionalgleichungen der Winkelfunktionen als Definitionsgrundlage

von

Jens Schwaiger (Graz)

1. Einleitung und Vorbereitung

Im Schulunterricht und auch in vielen Lehrbüchern der Analysis ist es üblich, die Winkelfunktionen anschaulich einzuführen. Das bedeutet insbesondere, daß die trigonometrischen Funktionen Sinus (sin) und Cosinus (cos), genauer, ihre Werte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, erklärt sind durch die in einem rechtwinkeligen Dreieck mit Öffnungswinkel α gemessenen Verhältnisse

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}.$$

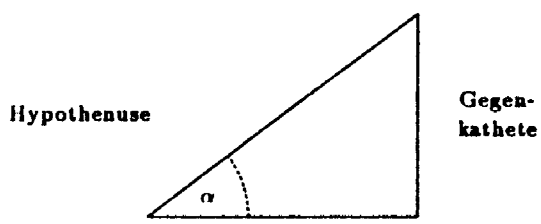

Abb. 1

Für die weiteren Untersuchungen, sowohl in geometrischer als auch in analytischer Hinsicht, sind die *Additions-* und *Subtraktionstheoreme* von großer Bedeutung; sie sind sogar unverzichtbar.

Betrachten wir die folgende Figur (Abb. 2).

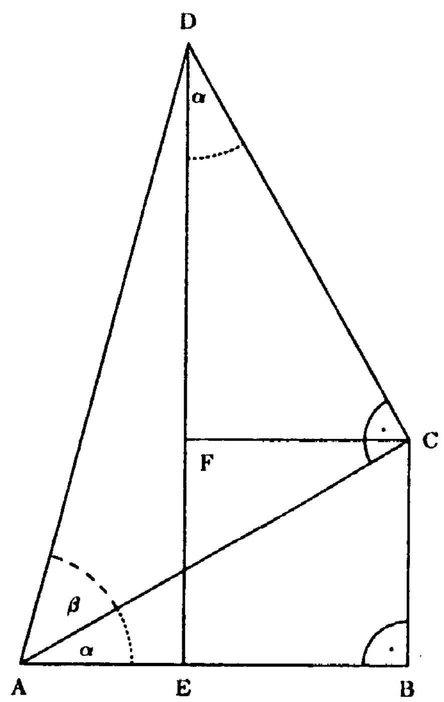

ABB. 2

Aus dieser ergeben sich, wenn die Länge $|AD| = 1$ angenommen wird und wenn man die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und ΔDFC berücksichtigt, nacheinander die Beziehungen:

1) $|AC| = \cos\beta$ (im Dreieck ΔACD)
2) $|CD| = \sin\beta$ (im Dreieck ΔACD)
3) $|AB| = |AC|\cos\alpha$ (im Dreieck ΔABC)
4) $|EF| = |BC| = |AC|\sin\alpha$ (im Dreieck ΔABC)
5) $|EB| = |FC| = |DC|\sin\alpha$ (im Dreieck ΔDFC)
6) $|DF| = |DC|\cos\alpha$ (im Dreieck ΔDFC)
7) $|ED| = \sin(\alpha+\beta)$ (im Dreieck ΔAED)
8) $|AE| = \cos(\alpha+\beta)$ (im Dreieck ΔAED)

Aus

$$|AE| = |AB| - |EB| \quad \text{und} \quad |ED| = |EF| + |FD|$$

folgt dann endlich

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned} \tag{1}$$

Das sind die *Additionstheoreme* der Winkelfunktionen. Sie gelten aufgrund unserer geometrisch-anschaulichen Herleitung zumindest für die folgenden Werte von α und β:

$$0 \le \alpha, \beta, \alpha+\beta \le 90°.$$

Die *Subtraktionstheoreme* erhält man daraus, wenn man zusätzlich den Satz von Pythagoras in der Form

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

verwendet: Multipliziert man nämlich die erste Gleichung von (1) mit $\cos\alpha$ und die zweite mit $\sin\alpha$, und addiert man anschließend diese beiden Beziehungen, so gelangt man zu

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha) = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\cos\beta + 0.$$

Wenn man aber die erste Gleichung mit $\sin\alpha$ und die zweite mit $\cos\alpha$ multipliziert und wenn man dann von der letzten so erhaltenen Gleichung die erste abzieht, so liefert dies

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha) = 0 + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\sin(\beta).$$

Anschließend muß nur noch $\alpha+\beta$ durch α und α durch β ersetzt werden, um zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{2}$$

zu gelangen.

Das Ziel der folgenden Darlegungen wird nun sein zu untersuchen, inwiefern die Gleichungen (1) oder (2) das Funktionenpaar (sin, cos) charakterisieren.

2. Die Additions- und Subtraktionstheoreme der Winkelfunktionen als Funktionalgleichungen

Anstelle von sin und cos betrachten wir jetzt beliebige reellwertige Funktionen

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Wir fragen sodann nach allen Lösungen (c, s) von

$$\begin{aligned} c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y) \\ s(x+y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y) \end{aligned} \tag{+}$$

und von

$$\begin{aligned} c(x-y) &= c(x)c(y) + s(x)s(y) \\ s(x-y) &= s(x)c(y) - c(x)s(y); \end{aligned} \tag{$-$}$$

d.h., wir wollen untersuchen, welche „allgemeine" Lösung das Funktionalgleichungssystem (+) (Additionstheoreme der Winkelfunktionen) besitzt und welche das System (−) (Subtraktionstheoreme der Winkelfunktionen).

In beiden Fällen ist es günstig, in die komplexe Ebene zu gehen. Dies geschieht durch die Einführung der Funktionen f und g ($f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) gemäß

$$\begin{aligned} f(x) &:= c(x) + is(x) \\ g(x) &:= c(x) - is(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Berechnung von s und c aus (3) ist einfach:

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{f(x) + g(x)}{2} \\ s(x) &= \frac{f(x) - g(x)}{2i}. \end{aligned} \tag{4}$$

Was bedeutet (+) für f und g? Um eine Antwort darauf zu erhalten, untersuchen wir $f(x+y)$ und $g(x+y)$; dabei setzen wir voraus, daß (+) für alle reellen x, y gültig ist.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= c(x+y) + is(x+y) = \\ &= (c(x)c(y) - s(x)s(y)) + i\,(s(x)c(y) + c(x)s(y)) = \\ &= (c(x) + is(x))\,(c(y) + is(y)) = \\ &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man

$$\begin{aligned} g(x+y) &= c(x+y) - is(x+y) = \\ &= (c(x)c(y) + s(x)s(y)) - i\,(s(x)c(y) + c(x)s(y)) = \\ &= (c(x) - is(x))\,(c(y) - is(y)) = \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß f und g der Funktionalgleichung der *Exponentialfunktion* genügen.

$$m(x+y) = m(x)m(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{E}$$

Die obigen Rechnungen können auch in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden. Folglich haben wir teilweise bewiesen:

Satz 1. *Genau dann erfüllen die Funktionen $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ das System (+), wenn es Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gleichung (E) gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = c(x) + is(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) = c(x) - is(x)$$

gilt.

Die Funktionen c und s sind reellwertig genau dann, wenn g die zu f konjugierte Funktion ist, d.h., wenn $g(x) = \overline{f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der noch ausständige Teil des **Beweises** ist sehr leicht nachzuholen. Wenn nämlich $g = \overline{f}$, so ergibt sich aus (4)

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2} = \Re f(x) \in \mathbb{R} \\ s(x) &= \frac{f(x) - g(x)}{2i} = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i} = \Im f(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Umgekehrt ergibt (3), daß für reellwertige Funktionen c und s

$$g(x) = c(x) - is(x) = \overline{f(x)}$$

gilt. □

Der Aussage dieses Satzes können wir entnehmen, daß die Lösungsgesamtheit von $(+)$ — zunächst ohne Berücksichtigung irgendwelcher Regularitätsbedingungen (wie etwa *Stetigkeit, Differenzierbarkeit,...*) — durch zwei „freie" Exponentialfunktionen beschrieben wird.

Anders ist die Situation für die Gleichung $(-)$.

Satz 2. *Genau dann erfüllen die Funktionen $c, s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ das System $(-)$, wenn es eine Lösung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ von (E) gibt, so daß für alle $x \in \mathbf{R}$*

$$c(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad s(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2i}$$

gilt.

Die Funktionen c und s sind genau dann beide reellwertig, wenn $f(-x) = \overline{f(x)}$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

Beweis. Wir untersuchen $f(x-y)$ und $g(x-y)$ und setzen für c und s die Beziehung $(-)$ voraus:

$$\begin{aligned} f(x-y) &= c(x-y) + is(x-y) = \\ &= (c(x)c(y) + s(x)s(y)) + i\,(s(x)c(y) - c(x)s(y)) = \\ &= (c(x) + is(x))\,(c(y) - is(y)) = \\ &= f(x)g(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x-y) &= c(x-y) - is(x-y) = \\ &= (c(x)c(y) + s(x)s(y)) - i\,(s(x)c(y) - c(x)s(y)) = \\ &= (c(x) - is(x))\,(c(y) + is(y)) = \\ &= f(y)g(x). \end{aligned}$$

Das heißt, daß f und g für alle $x, y \in \mathbf{R}$ die folgenden Beziehungen erfüllen.

$$f(x-y) = f(x)g(y) \tag{5}$$
$$g(x-y) = f(y)g(x) \tag{6}$$

Als nächstes werden wir einen „Trivialfall" untersuchen. Wenn $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbf{R}$, so folgt aus (6) mit $y = x_0$, daß $g \equiv 0$; dann aber verschwindet f ebenfalls identisch: $f \equiv 0$. Im Fall $g(x_0) = 0$ kommt man auf gleiche Weise zum selben Ergebnis. D.h., es gilt

$$f(x_0)g(x_0) = 0 \quad \text{für ein}\, x_0 \implies f \equiv g \equiv 0. \tag{7}$$

Aus $f \equiv g \equiv 0$ folgt aber das Gewünschte, da die Nullfunktion eine (triviale) Lösung von (E) ist und da sich aus (4) $c \equiv s \equiv 0$ ergibt.

Im anderen Fall verschwinden wegen (7) die Funktionen f und g nirgends. Deshalb folgt aus (5) und (6) für $x = y = 0$, daß

$$f(0) = g(0) = 1.$$

Setzt man nun in (5) für x den Wert 0 ein, so bedeutet dies

$$f(-y) = g(y).$$

Somit gilt wegen (4) die im Satz angegebene Beziehung für c und s.

Wir haben aber noch zu zeigen, daß f eine Exponentialfunktion ist. (Daß daraus dasselbe für g folgt, ist wegen $g(x) = f(-x)$ offensichtlich.)

Dies ist aber auch ganz einfach; wir müssen nur in (5) y durch $-y$ ersetzen (und nochmals $f(-y) = g(y)$ verwenden).

□

Bemerkung 1. Wie schon früher erwähnt wurde, enthält die Lösungsgesamtheit der Gleichung (+) *zwei* beliebige Exponentialfunktionen. Aus Satz 2 ergibt sich, daß die Gesamtheit aller Lösungen von (−) nur *eine* freie Exponentialfunktion enthält. Ferner ergibt sich aus den Sätzen 1 und 2, daß jede Lösung von (−) auch eine Lösung von (+) ist. Wenn wir ferner die in der Einleitung anschauliche Herleitung der Subtraktions- aus den Additionstheoremen betrachten, so können wir feststellen:

Erfüllen $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ das System (+) der Additionstheoreme und den „Satz von Pythagoras“,

$$c(x)^2 + s(x)^2 = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

so genügen sie auch dem System (−) der Subtraktionstheoreme, sie sind also von der im Satz 2 angegebenen Gestalt

Bemerkung 2. Es gibt nichtreguläre (und dann notwendigerweise sehr pathologische) Lösungen von (+) und (−), und zwar auch solche, die nur reelle Werte annehmen. Aus den Anfangsgründen der Theorie der (ersten) CAUCHYschen Funktionalgleichung

$$a(x+y) = a(x) + a(y) \qquad (a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}), \tag{A}$$

deren Lösungen man *additive* Funktionen nennt, ist bekannt, daß alle Lösungen von (A), die nicht von der Form $x \mapsto kx$ (k eine reelle Konstante) sehr pathologisch sind; der Graph einer solchen Funktion, d.h., die Menge

$$\{(x, a(x)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

liegt in der Ebene $\mathbb{R}^2$ dicht. Das bedeutet, daß sich in beliebiger Nähe eines beliebigen Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Punkte der Form $(x, a(x))$ finden lassen. Sind aber a_1, a_2 zwei additive Funktionen, von denen zumindest eine „pathologisch“ ist, so sind f und g, definiert durch

$$\left.\begin{aligned} f(x) &:= \exp(a_1(x) + ia_2(x)) \\ g(x) &:= \exp(a_1(x) - ia_2(x)) \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{8}$$

zwei pathologische Lösungen von (E), weswegen dann gemäß Satz 1 die Funktionen c und s, definiert durch

$$\left.\begin{aligned} c(x) &:= \exp(a_1(x))\cos(a_2(x)) \\ s(x) &:= \exp(a_1(x))\sin(a_2(x)) \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{9}$$

eine pathologische Lösung von (+) bilden; diese Lösung erfüllt (−) genau dann, wenn $a_1 \equiv 0$.

Es sei weiterhin angemerkt, daß dadurch aber noch nicht alle Lösungen erfaßt sind. Die Gleichung (E) hat nämlich auch Lösungen, die nicht von der Form $\exp \circ a$ (a additiv) sind. Literatur zum Gegenstand findet man, um einige Werke zu nennen, in [A1], im deutschen Original davon, [A2], und in [AD]. Ein kleiner Überblick zum Thema der Cauchyschen Funktionalgleichungen findet sich in [S]. Das Literaturverzeichnis der letztgenannten Arbeit enthält weitere Zitate, diese sind aber durch ein Versehen des Verlages wichtiger Angaben beraubt.

Nun wollen wir aber den pathologischen Bereich verlassen und untersuchen, wie die regulären Lösungen von (+) und (−) aussehen.

3. Die regulären Lösungen

Es wäre jetzt recht einfach, die analytischen Lösungen, d.h., die Potenzreihenlösungen, von (+) und von (−) zu bestimmen. Dies wird aber den Anliegen der Theorie der Funktionalgleichungen nicht gerecht. Dieses besteht nämlich in diesem — und in ähnlichen Zusammenhängen — darin, aus schwachen Regularitätsforderungen in Verbindung mit der betrachteten Funktionalgleichung starke Regularität der Lösung herzuleiten. Es ist eine Eigenart vieler Funktionalgleichungen, daß sich, bedingt durch die Verknüpfung der Funktionswerte an verschiedenen Stellen, Gut- und Bösartigkeit einer Lösung von einer Stelle an alle anderen übertragen läßt. Anhand der Additions- und Subtraktionstheoreme und anhand von (E) kann das sehr schön demonstriert werden.

Wir wollen hier als Regularität der untersuchten Funktionen deren *Integrierbarkeit im* RIEMANN*schen Sinn* auf allen Teilintervallen von $\mathbb{R}$ fordern. (Integrierbarkeit im Sinne von LEBESGUE wäre als Voraussetzung genug; wir begnügen uns aber mit der im Sinne von RIEMANN, da wir beim Leser die Vertrautheit mit dem LEBESGUEschen Integral nicht voraussetzen wollen.)

Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Wir sagen, daß f auf dem Intervall $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar* ist, wenn die Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ (Real- und Imaginärteil von f) auf diesem Intervall Riemann-integrierbar sind, und wir setzen in diesem Fall fest:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b f := \int_a^b \Re f + i \int_a^b \Im f.$$

Dann ist leicht einzusehen, daß die Summe zweier integrierbarer (dies soll in Hinkunft immer Riemann-integrierbar bedeuten) Funktionen wieder integrierbar ist und daß das Produkt einer integrierbaren Funktion mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ ebenfalls integrierbar ist. Ferner gilt für integrierbare $f, g : I \to \mathbb{C}$ und für $c \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{und} \quad \int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

Wir erklären ferner für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die

i) *lokale Integrierbarkeit* dadurch, daß f auf jedem kompakten Teilintervall $[a, b]$ von $\mathbb{R}$ integrierbar ist und die

ii) *n-mal (stetige)* ($n \geq 0$, 0-mal stetige Differenzierbarkeit = Stetigkeit) *Differenzierbarkeit* dadurch, daß $\Re f$ und $\Im f$ auf $\mathbb{R}$ n-mal (stetig) differenzierbar sind.

Sinngemäß sind auch andere Begriffe (Stetigkeit in einem Punkt $x_0, \ldots$) erklärt; die n-te Ableitung von f in x erklären wir durch

$$f^{(n)}(x) := (\Re f)^{(n)}(x) + i(\Im f)^{(n)}(x).$$

Für n-mal stetig differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt wie im Reellen die TAYLORsche Formel mit Integralrestglied

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \\ + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}\,dt.$$

(Für $x < x_0$ sei $\int_{x_0}^{x} f := -\int_{x}^{x_0} f$.)

Nun kommen wir zu

Satz 3. *Eine lokal integrierbare Funktion $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Lösung von (E), wenn es eine komplexe Zahl μ gibt, so daß*

$$m(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mu^{\ell}}{\ell!} x^{\ell} =: e^{\mu x} \tag{10}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ oder wenn $m \equiv 0$.

Beweis. Der Fall $m \equiv 0$ ist klar. Daß (10) eine (sogar analytische) Lösung von (E) ist, ist offensichtlich und leicht nachzurechnen.

Es sei also $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Lösung von (E). In [H, S 470-473] wird gezeigt, daß m dann fast überall stetig ist; „fast überall" bedeutet, daß m auf einer großen, insbesondere auf einer nichtleeren Menge stetig ist. Wir können außerdem annehmen, daß m nicht identisch verschwindet. Dann verschwindet aber m, wie der Beweis von Satz 2 zeigt, nirgends, und es ist $m(0) = 1$.

Wenn nun m im Punkt x_0 stetig ist (die eben angestellten Überlegungen zeigen, daß mindestens ein solcher Punkt existiert), so ergibt die aus der Funktionalgleichung (E) folgende Relation

$$m(y) = \frac{m(x_0 + y)}{m(x_0)}$$

die Stetigkeit von m in 0. Aus dieser folgt wiederum ganz leicht die Stetigkeit von m in einem beliebigen Punkt x.

Es sei $M(x) := \int_0^x m(t)dt$. Dann ist M als Stammfunktion der schon als stetig erkannten Funktion m differenzierbar, und es ist m die Ableitung von M: $M' = m$. Da $m(0) = 1 \neq 0$ und da m stetig ist, muß $M(y) = \int_0^y m(t)dt$ für alle hinreichend nahe bei 0 gelegenen y-Werte von 0 verschieden sein. (Dies erkennt man, indem man auf ein entsprechendes Resultat für reellwertige stetige Funktionen zurückgreift, und berücksichtigt, daß wegen $m(0) = 1$ der Realteil von m in einer Umgebung von 0 von 0 verschieden ist.)

Als nächstes integrieren wir die Relation (E) bei festem x bezüglich y zwischen 0 und t und erhalten

$$\int_0^t m(x+y)dy = m(x)\int_0^t m(y)dy,$$

oder, wenn wir die linke Seite umschreiben

$$M(x+t) - M(x) = m(x)M(t).$$

Da x beliebig ist und da $M(t) \neq 0$ für geeignetes t, bedeutet dies

$$m(x) = \frac{M(x+t) - M(x)}{M(t)}.$$

Das aber heißt, daß m stetig differenzierbar ist, weil ja die rechte Seite dieser Beziehung es ist. Folglich ist es nun zulässig, (E) (nach y) zu differenzieren. Dies führt zu

$$m'(x+y) = m(x)m'(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

oder, mit $y = 0$ und $\mu := m'(0)$, zu

$$m'(x) = \mu m(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{11}$$

(11) läßt nun erkennen, daß m' stetig differenzierbar ist und daß $m''(x) = \mu^2 m(x)$. So fortfahrend erhält man noch mehr. Für jedes n ist m n-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$m^{(n)}(x) = \mu^n m(x) \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0). \tag{12}$$

Abschließend verwenden wir die oben erwähnte TAYLOR-Formel mit $x_0 = 0$ (und $m(0) = 1$):

$$m(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\mu^\ell}{\ell!} x^\ell + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \mu^n m(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Geläufige Standardargumente zeigen, daß das Restglied für $n \to \infty$ gegen 0 geht. Damit gelangt man aber zu (10). □

Bemerkung 3. Dem Beweis kann man entnehmen, daß die Aussage auch dann gilt, wenn die Integrierbarkeit nur auf einem (beliebig kleinen) Intervall positiver Länge oder die Stetigkeit in (nur) einem Punkt vorausgesetzt wird. Änliches kann auch für den folgenden Satz gesagt werden. Trennt man ferner μ in Real- und Imaginärteil, $\mu = \rho + i\sigma$, $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, so ergibt sich für $m(x)$ aus (10)

$$m(x) = \exp(\rho x + i\sigma x),$$

d.h., m ist von der in (8) beschriebenen Gestalt, wobei hier die additiven Funktionen a_1 und a_2 von der „gutartigen“ Form $x \mapsto kx$ sind.

Satz 4. *Genau dann genügen die auf $\mathbb{R}$ definierten, lokal integrierbaren und reellwertigen Funktionen c und s den Additionstheoremen (+), wenn entweder*

$$c \equiv s \equiv 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} c(x) &= e^{\rho x}\cos(\sigma x) \\ s(x) &= e^{\rho x}\sin(\sigma x) \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

mit beliebigen reellen Konstanten ρ und σ.

Die auf $\mathbb{R}$ definierten, lokal integrierbaren und reellwertigen Funktionen c und s erfüllen genau dann das System (−) der Subtraktionstheoreme, wenn entweder

$$c \equiv s \equiv 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} c(x) &= \cos(\sigma x) \\ s(x) &= \sin(\sigma x) \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

mit einer beliebigen reellen Konstanten σ.

Beweis. Aus (3) und (4) folgt, daß c und s genau dann beide lokal integrierbar sind, wenn die Funktionen f und g es sind. Aus Satz 1 ergibt sich nun, daß (c, s) genau dann ein reellwertiges Lösungspaar von (+) ist, wenn $g = \overline{f}$ und wenn f eine Exponentialfunktion ist. Der Fall $f \equiv 0$ führt zu $c \equiv s \equiv 0$. Im anderen Fall liefert Satz 3, daß

$$f(x) = e^{\rho x} e^{i\sigma x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit ist wegen $\overline{f(x)} = e^{\rho x} e^{-i\sigma x}$ im Fall der Additionstheoreme der Satz gezeigt.

Im Fall der Subtraktionstheoreme laufen die Überlegungen ganz ähnlich. Zusätzlich muß man aber Satz 2 heranziehen. Aus diesem folgt nämlich $\overline{f(x)} = f(-x)$, was für die obige Form von f bedeutet, daß $\rho = 0$ sein muß.

□

Bemerkung 4. Nun ist es einfach, die gewohnten Winkelfunktionen auszusondern. Läßt man sich wieder von der Anschauung leiten, so kann man zusätzlich zu (−) oder (+) (letzteres gemeinsam mit dem Satz von Pythagoras)

$$\lim_{x \to 0} s(x)/x = 1$$

fordern, im Einklang mit der Vorstellung, daß der Bogen im Einheitskreis den dazugehörigen Sinus-Wert umso besser approximiert, je näher der Winkel x bei 0 liegt. Erst jetzt ist man in der Lage, eine saubere analytische Deutung des Winkels zu geben. Genaueres findet man in fast allen einführenden Büchern zur Analysis.

4. Ein kurioses Beispiel

Es gäbe natürlich noch sehr viel zu diesem Themenkreis zu sagen. Ich verweise Interessierte auf die Literatur, vor allem auf [AD].

Einen Sachverhalt möchte ich aber noch anhand eines Beispieles verdeutlichen: Es gibt Funktionalgleichungen, die ihre Lösung bei Vorgabe eines geeigneten Teiles fast völlig festlegen. Betrachten wir dazu die Formel für den Cosinus des doppelten Winkels;

$$c(2x) = 2c(x)^2 - 1. \tag{13}$$

Ist dann c_0 eine auf (sagen wir) $[1/2, 1]$ stetige Funktion mit Werten zwischen 0 und 1, so läßt sich diese zu einer stetigen Lösung von (13) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, wenn nur $c_0(1) = 2c_0(1/2)^2 - 1$. Die Idee ist folgende:

Ist c auf $[x_0, 2x_0]$ ($x_0 > 0$) gegeben, so muß, damit (13) gilt, auf $[2x_0, 4x_0]$ die Relation

$$c(x) = 2c(x/2)^2 - 1 \qquad (2x_0 \le x \le 4x_0)$$

erfüllt sein. Ganz analog erweitert man die Funktion nach links, indem man (13) nach $c(x)$ auflöst; dabei bereitet die Wahl des richtigen Wurzelvorzeichens Probleme, die durch unsere Voraussetzung, daß die Werte von c_0 nichtnegativ sind, vermieden werden.

Dieser Strategie folgend sind die Abbildungen 3 und 4 entstanden. Die vorgegebene Funktion $U(x)$ ist der durchgezogene Funktionsgraph in Abb. 3. In Abb. 4 ist die auf $[8, 16]$ fortgesetzte Funktion zu sehen.

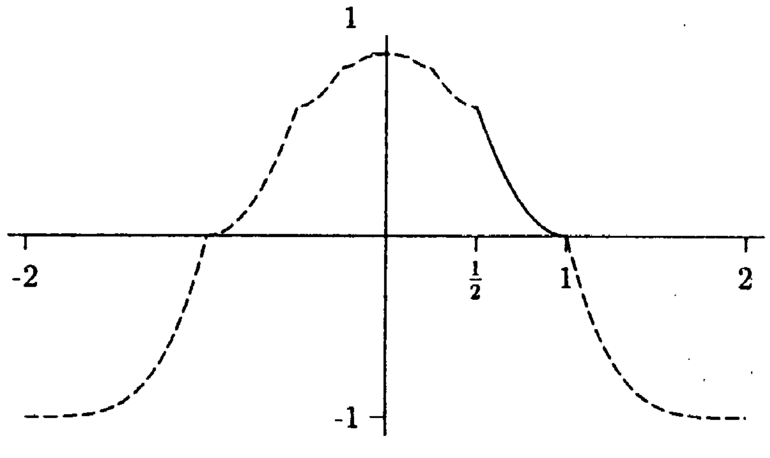

Abb. 3

Zur Berechnung habe ich DERIVE eingesetzt. Die Funktion L ist in diesem System folgendermaßen erklärt:

```
"Eine auf [0.5,1] konvexe Funktion mit geeigneten Werten"
"zwischen 0 und 1"
U(x):=2*SQRT(2)*x^2+(-4*SQRT(2))*x+2*SQRT(2)
```

```
"Die dazugehörige 'Cosinus'-Funktion"
L(x):=
  IF(x<0,L(-x),
    IF(x=0,1,
      IF(x<0.5,SQRT((L(2*x)+1)/2),
        IF(x<1,U(x)),2*L(x/2)^2-1) ) ) )
```

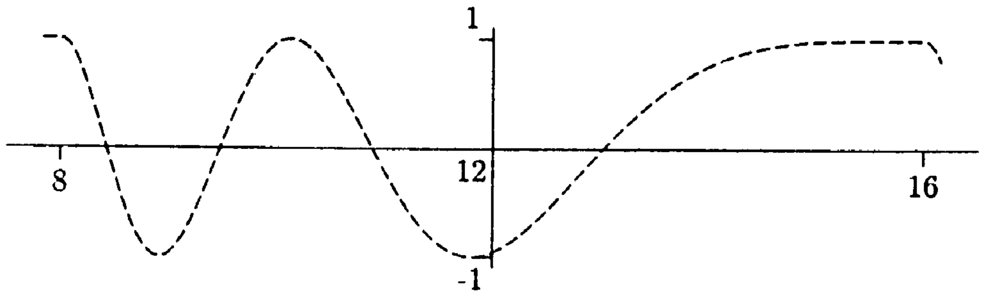

ABB. 4

LITERATURANGABEN

[A1] ACZÉL, J.: Lectures on functional equations and their applications. (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19). Academic Press, New York-London, 1966.

[A2] ACZÉL, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1961.

[AD] ACZÉL, J. and DHOMBRES J.: Functional equations in several variables. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1989.

[H] HEUSER H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner, Stuttgart, 1980.

[S] SCHWAIGER J.: Funktionalgleichungen: Grundlegende Gleichungen mit Anwendungen — ein kleiner Überblick. In CHATTERJI S. D., FUCHSSTEINER B., KULISCH U. und LIEDL R. (Hrsg.): Jahrbuch Überblicke Mathematik 1994, Vieweg, Wiesbaden, 1994, S 1-13.

Adresse des Verfassers: JENS SCHWAIGER
Institut für Mathematik
Universität Graz
Heinrichstraße 36
A-8010 Graz